۱۲۶

برای بدست آوردن قرینه یک خط نسبت به خط $y=x$ کافیست جای x و y را عوض کنیم

$$3y-2x=4 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت } y=x} 3x-2y=4 \xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}} -2y=4 \to y=-2$$

گزینه ۱ درست است.

۱۲۷

$$-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} > 2x+|x|$$

$$\Rightarrow \text{if}\ x\geq 0 \longrightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} > 2x+x \to -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} > 3x$$

$$\xRightarrow{\times(-2)} 2x^2+x-9 < -6x \to 2x^2+7x-9<0 \to \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{9}{2}\end{cases}$$

x		$-\frac{9}{2}$		1	
$2x^2+7x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\left(-\frac{9}{2},1\right)\cap[0,+\infty)=(0,1)$$

$$\text{if}\ x<0 \Rightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} > 2x+(-x) \Rightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} > x$$

$$\xRightarrow{\times(-2)} 2x^2+x-9 < -2x \to 2x^2+3x-9<0 \to \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{3}{2}\end{cases}$$

x		-3		$\frac{3}{2}$	
$2x^2+3x-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

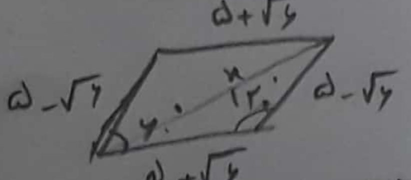
$$\left(-3,\frac{3}{2}\right)\cap(-\infty,0)=(-3,0)$$

جواب نهایی

$$(-3,0)\cup(0,1)=(-3,1)-\{0\}$$

$$\text{طول نقطه وسط} = \frac{-3+1}{2}=-1$$

۱۲۸



قضیه کسینوس‌ها

$$x^2=(5-\sqrt{6})^2+(5+\sqrt{6})^2-2(5-\sqrt{6})(5+\sqrt{6})\cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow x^2=25-10\sqrt{6}+6+25+10\sqrt{6}+6-2(25-6)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2=81 \longrightarrow x=9$$

۱۲۹)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $= 7 + 6 + 9 + 22 = 44$

۱۳۰) محاسبه میانگین به روش سریع

$x_i - 17$	-10	-5	0	5	10
f_i	2	5	8	a	4

میانگین جدید $= \dfrac{-10\times 2 + (-5)\times 5 + 0\times 8 + 5\times a + 10\times 4}{2+5+8+a+4} = \dfrac{-20-25+0+5a+40}{19+a}$

$$= \frac{-5+5a}{19+a}$$

میانگین اصلی = میانگین جدید + عدد

$$18 = \frac{-5+5a}{19+a} + 17 \rightarrow \frac{-5+5a}{19+a} = 1 \Longrightarrow -5+5a = 19+a$$

$$\Longrightarrow 4a = 24 \rightarrow a = 6$$

درصد فراوانی نسبی $= \dfrac{\text{فراوانی}}{\text{کل}} \times 100 = \dfrac{6}{\cancel{25}_{1}} \times \cancel{100}^{4} = 24$

۱۳۱

اصلی $x_1, x_2, \dots, x_n$

اصلی $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 25$

$CV = 0.06$

$$\Big\} \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma = 25 \times 0.06 = 1.5$$

جدید $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2 \Longrightarrow \underset{\text{جدید}}{\bar{x}} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = ?$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^2$$

$$\Longrightarrow (1.5)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (25)^2 \rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} = 2.25 + 625$$

$$= 627.25$$

۱۳۲

$n(S) = 36$

$A = \{(1,3),(2,2),(1,3),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(6,6)\}$

$n(A) = 9$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

۱۳۳

$$\begin{cases} P > 0 \rightarrow \dfrac{c}{a} > 0 \rightarrow \dfrac{-3}{m-6} > 0 \rightarrow m-6 < 0 \rightarrow \boxed{m < 6} \quad (\mathrm{I}) \\ S < 0 \rightarrow -\dfrac{b}{a} < 0 \rightarrow -\dfrac{-2m}{m-6} < 0 \rightarrow \dfrac{2m}{m-6} < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

m		0		6	
$2m$	$-$	0	$+$		$+$
$m-6$	$-$		$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$		$+$

$\boxed{0 < m < 6} \quad (\mathrm{II})$

$(-2m)^2 - 4(m-6)(-3) > 0$

$4m^2 + 12m - 72 > 0$

$4(m^2 + 3m - 18) > 0$

m		-6		3	
	$+$	0	$-$	0	$+$

$\boxed{(-\infty, -6) \cup (3, +\infty)} \quad (\mathrm{III})$

اشتراک $(\mathrm{I}), (\mathrm{II}), (\mathrm{III}) \Rightarrow (3, 6) \Rightarrow 3 < m < 6$

۱۳۴

$$\frac{\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}}{\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sin x - \cos x)}{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sin x + \cos x)} = 2 \Rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 2$$

$$\xrightarrow[\text{ص، م}]{\div \cos x} \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = 2 \rightarrow \tan x - 1 = 2\tan x + 2 \rightarrow \tan x = -3$$

۱۳۵

$2x-3=t \rightarrow x=\dfrac{t+3}{2}$

$f(t)=4\left(\dfrac{t+3}{2}\right)^2-\cancel{14}^{\,7}\left(\dfrac{t+3}{\cancel{2}}\right)+13$

$f(t)=4\left(\dfrac{t^2+6t+9}{4}\right)-7t-21+13$

$f(t)=t^2+6t+9-7t-21+13=t^2-t+1$

$\Rightarrow f(x)=x^2-x+1$

۱۳۶

Hop: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{6x-10}{\dfrac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{x}}}\times\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}=\dfrac{6(4)-10}{\dfrac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{4}}}\times\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{4}}\right)}$

$=\dfrac{14}{\dfrac{1}{2}\times-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{14}{-\dfrac{1}{8}}=-112$

۱۳۷

حد راست: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=a\log_2^{1+3}=a\log_2^{4}=a\cdot(2)=2a$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=a(3)+2^{3-3}=3a+2^0=3a+1$

مقدار: $f(3)=2a$

$\Rightarrow 3a+1=2a\rightarrow \boxed{a=-1}$

$f(2)=(-1)(2)+2^{2-3}=-2+2^{-1}=-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}=-1.5$

۱۳۸

$y'=4\sin^3x\cos x-4\cos^3x\sin x=4\sin x\cos x(\sin^2x-\cos^2x)$

$=4\times\dfrac{1}{2}\sin 2x(-\cos 2x)=-2\sin 2x\cos 2x$

$=-2\times\dfrac{1}{2}\sin 4x=-\sin 4x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{8}} -\sin 4\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

$=-\sin\dfrac{\pi}{2}=-1$

@eshgheriazikonkour

(۱۳۹)

$p = \frac{3}{4}$

$n = 5$

$k = 4$ یا 5

$$\binom{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^0$$

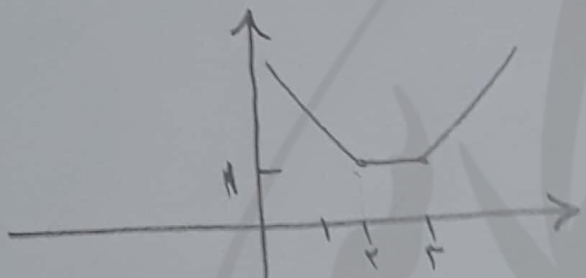
$$= 5\left(\frac{81}{256}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{243}{1024}$$

$$= \frac{405}{1024} + \frac{243}{1024} = \frac{648}{1024} = \frac{324}{512}$$

$$= \frac{162}{256} = \frac{81}{128}$$

---

(۱۴۰) نمودار تابع $f(x) = |x-2| + |x-3|$ یک نمودار معادل به صورت زیر است



این نمودار در بازه $(-\infty, 2)$ اکیداً نزولی است $(x<2)$

$$x<2 \Rightarrow f(x) = -(x-2) + \left(-(x-3)\right) = -2x+5$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = -2x + 5$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{ق ق} \\ x = \frac{5}{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس در یک نقطه مشترک هستند

---

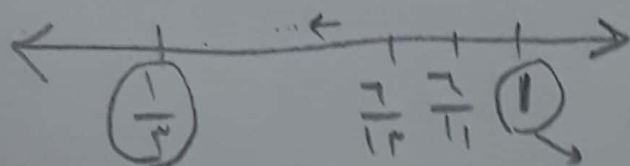
(۱۴۱)

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

$n=1 \rightarrow u_1 = 1$

$n=2 \rightarrow u_2 = \frac{6}{11}$

$n=3 \rightarrow u_3 = \frac{6}{13}$



بزرگترین کران پایین

کوچکترین کران بالا

(کمترین) تفاضل $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$40 = 60 - 50e^{-0.25t} \longrightarrow -20 = -50e^{-0.25t} \longrightarrow e^{-0.25t} = \frac{2}{5}$ ۱۴۲

$\ln\frac{2}{5} = -0.25t \longrightarrow -\ln\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = -0.25t$

$\Rightarrow -\ln 2.5 = -0.25t \rightarrow t = \frac{0.91}{0.25} = 3.64$

۳ ماه و ۰٫۶۴ ماه که می‌شود سه ماه و نوزده روز

$\tan x \cdot \tan 3x = 1 \longrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \longrightarrow \tan 3x = \cot x$ ۱۴۳

$\rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

پیوستگی ۱۴۴

$\begin{cases} -2^+ : & 4a - 2b + 4 \\ -2^- : & -8-(-2) = -8+2 = -6 \Rightarrow 4a-2b+4=-6 \\ f(-2) = & 4a - 2b + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{4a - 2b = -10}$

مشتق‌پذیر

$\begin{cases} 2ax + b & \longrightarrow f'(-2^+) = -4a + b \\ 3x^2 - 1 & \quad f'(-2^-) = 11 \end{cases} \longrightarrow \boxed{-4a + b = 11}$

$\begin{cases} 4a - 2b = -10 \\ -4a + b = 11 \end{cases}$

$-b = 1 \rightarrow b = -1 \quad , \quad a = -3$

$f(1) = -3(1)^2 + (-1)(1) + 4 = -3 - 1 + 4 = 0$

$\frac{14x - 2y'}{2\sqrt{7x^2 - 2y}} + 2yy' = 0 \xrightarrow{(1,3)} \frac{14 - 2y'}{2} + 6y' = 0$ ۱۴۵

$\xrightarrow{\times 2} 14 - 2y' + 12y' = 0 \longrightarrow 10y' = -14 \rightarrow y' = -\frac{7}{5}$

شیب خط قائم برابر $\frac{5}{7}$ (قرینه معکوس)

١٤٦

$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2} - 4}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$= \frac{4x-4}{3\sqrt[3]{x^2}} \to 4x-4=0 \to x=1$

همواره مثبت

	1	
$-$		$+$
نزولی		صعودی

بازه نزولی $(-\infty, 1)$

$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4x^{-\frac{2}{3}}}{9} + \frac{8}{9x^{\frac{5}{3}}} = \frac{4x+8}{9x^{\frac{5}{3}}}$

$= \frac{4x+8}{9x\sqrt[3]{x^2}}$

همواره مثبت

	-2		0	
$+$		$-$		$+$
$\cup$		$\cap$		$\cup$

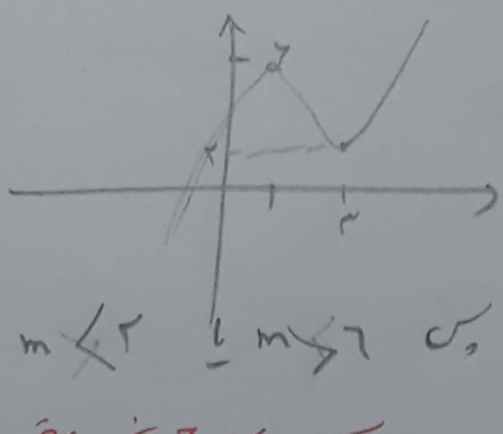
در بازه $(-2, 0)$ همواره تقعر رو به پایین

اشتراک: $(-\infty, 1) \cap (-2, 0) = (-2, 0)$

١٤٧

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

x		1		3	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$



پس $m < 2$ یا $m > 6$

جوابات تشریحی تمام تست ریاضی در کانال تلگرام

@eshgheriazikonkour

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ جهانگیر

(۱۴۸)

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(\;)^2}$$

$$(x-3)^2+(y-6)^2 = 4(x^2+y^2)$$

$$x^2-6x+9+y^2-12y+36 = 4x^2+4y^2$$

$$-3x^2-6x+9-3y^2-12y+36=0$$

$$-3x^2-6x-3y^2-12y+45=0$$

چون ضریب x^2 و y^2 با هم برابر است پس یک دایره داریم بزرگترین وتر در دایره قطر است

$$\xrightarrow{\div(-3)} x^2+2x+y^2+4y-15=0$$

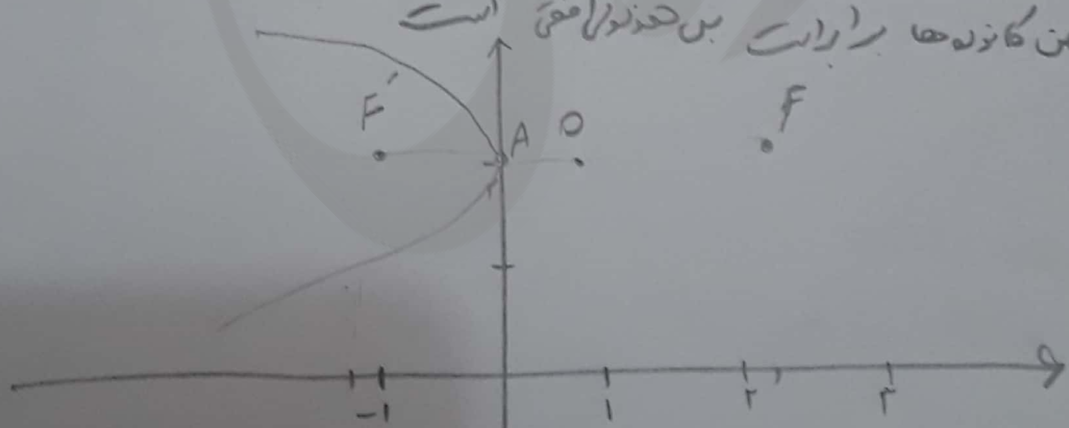
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4(15)} = \frac{1}{2}\sqrt{80}$$

$$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{قطر} = 2r = 2\times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

---

(۱۴۹) چون عرض کانون‌ها برابر است پس محور افقی است



$$FF' = 2c \to (1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5}) = 2c \to c=\sqrt{5}$$

$$O = \left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1,2) \to OA = a \to \boxed{a=1}$$

Scanned by CamScanner

$c^2 = a^2 + b^2$

$5 = 1 + b^2 \rightarrow b = 2$

معادله هذلولی افقی:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

شیب مجانب‌ها در هذلولی افقی $\pm\frac{b}{a}$ است پس

$m = + \frac{2}{1} = 2$

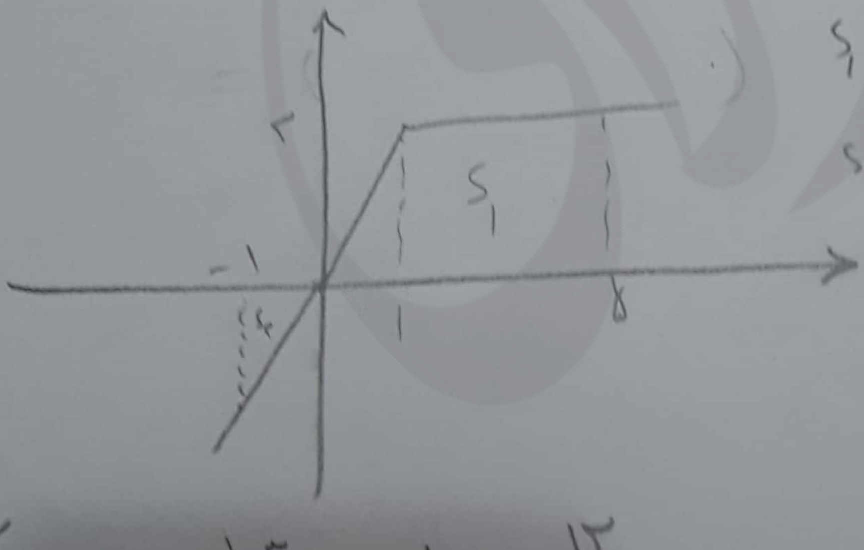
مرکز هذلولی همان محل تقاطع مجانب‌ها است

$O(1, 2)$

$y - 2 = 2(x-1) \rightarrow y = 2x$ معادله مجانب هذلولی

---

(۱۵۰) (مجموع مساحت‌ها زیر محور xها) − (مجموع مساحت‌های بالای محور xها) = حاصل انتگرال



$S_1 = \frac{1}{2}(5+4) \times 3 = 13.5$

$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$

حاصل انتگرال $= 13.5 - 1.5 = 12$

---

(۱۵۱) $\int_1^4 \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{2x^3}{x^2}dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx = \int 2x\,dx - \int x^{-\frac{3}{2}}dx$

$= x^2 - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = x^2 + 2x^{-\frac{1}{2}} = x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\Big]_1^4 = (16+1) - (1+2)$

$= 17 - 3 = 14$