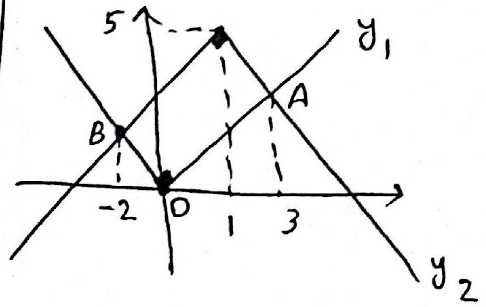
۱۰۱ - گزینه «4»

$y_1=|x|\ ,\ y_2=5-|x-1|$



با رسم دو تابع y_1 و y_2 ، مساحت محدود بین دو تابع را که یک مستطیل است با محاسبه مختصات نقاط برخورد A و B و طول پاره خط‌های OA و OB به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$y_1=y_2 \rightarrow |x|=5-|x-1| \rightarrow \begin{cases} \text{نقطه } A \xrightarrow{x\geq 1} x=5-(x-1) \rightarrow x=3 \rightarrow A(3,3) \\ \text{نقطه } B \xrightarrow{x<0} -x=5+(x-1) \rightarrow x=-2 \rightarrow B(-2,-2) \end{cases}$$

$$OA=\sqrt{(3)^2+(3)^2}=\sqrt{18}\ ,\ OB=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8} \rightarrow S_{\square}=\sqrt{18}\sqrt{8}=\sqrt{144}=\boxed{12}$$

۱۰۲ - گزینه «3»

اگر فرض کنیم مقدار بار در روز اول a باشد با کاهش 5 درصدی a در روز اول ، در پایان روز اول، 95 درصد a مانده است و مجدداً با کاهش 5 درصد در روز دوم ، در پایان روز دوم 95 درصد به توان دو a مانده است پس مقدار بار مانده در پایان روز n ام برابر $(0/95)^n a$ می‌باشد که طبق گفته مسئله باید برابر $\frac{a}{2}$ شود.

$$(0/95)^n a=\frac{a}{2} \rightarrow (0/95)^n=\frac{1}{2} \rightarrow \log_{\frac{95}{100}}\frac{1}{2}=n \rightarrow$$

$$n=\log_{\frac{20}{19}}2=\frac{\log 2}{\log\frac{20}{19}}=\frac{\log 2}{\log 2+\log 10-\log 19}=\frac{0/301}{0/301+1-1/287}=$$

$$=\frac{0/301}{0/014}=\frac{301}{14}=\boxed{21/5}$$

پاسخ تشریحی دیفرانسیل کنکور سراسری ۱۳۹۷ «حمید علیزاده»

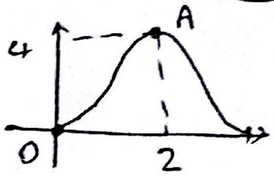
۱۰۳ - گزینه «4»

$\log(x+2)+\log(2x-1)=\log(4x+1) \to \cancel{\log}(2x^2+3x-2)=\cancel{\log}(4x+1)$

$\to 2x^2-x-3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \notin D \\ x=-\frac{c}{a}=\frac{3}{2} \in D \end{cases} \to \log_4^{2x+5}=\log_4^{8}=\log_{2^2}^{2^3}$

$=\frac{3}{2}=\boxed{1/5}$

۱۰۴ - گزینه «1»



$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4 \to x_{max}=2$

$y=a+b\cos(\frac{\pi}{2}x) \to \begin{cases} A(2,4) \to a-b=4 \\ O(0,0) \to a+b=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases}$

۱۰۵ - گزینه «3»

$x^2-2x=A \to A^2-A-2=0 \to \begin{cases} A=-1 \to x^2-2x=-1 \\ A=2 \to x^2-2x=+2 \end{cases}$

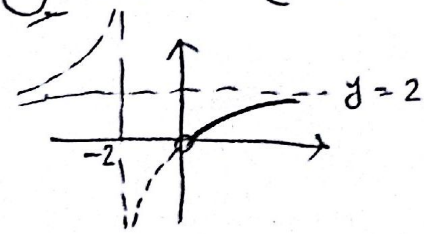
$\to \begin{cases} (x-1)^2=0 \to \boxed{x=1} \\ x^2-2x-2=0 \to \boxed{x=1\pm\sqrt{3}} \end{cases} \to$ معادله سه ریشه متمایز دارد

۱۰۶ - گزینه «2»

$y=\frac{f}{g}(x)=\frac{x+|x|}{|x+1|+1} \to D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$

برای ساده کردن ابتدا تابع قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$y=\begin{cases} x<-1 \to \frac{x-x}{-(x+1)+1}=0 \\ -1\leq x\leq 0 \to \frac{x-x}{x+1+1}=0 \\ x>0 \to \frac{2x}{x+2} \end{cases}$



تابع هموگرافیک $y=\frac{2x}{x+2}$ با شرط $x>0$ دارای شکل مقابل است که برد آن $(0,2)$ است که اجتماع برد آن با برد ضابطه دیگر که صفر است به صورت $[0,2)$ می‌باشد

۱۰۷- گزینه «۱»

$f(x)=x+\sqrt{x} \longrightarrow f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0 \longrightarrow$ صعودی اکید است

$f(x)$ در بازه $(0,+\infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است
بنابراین یک به یک می باشد.

سه گزینه دیگر نیز پیوسته اند و با توجه به تعیین علامت مشتق، این توابع در بخشی از بازه دامنه صعودی و در بخش دیگر نزولی است پس یک به یک نمی باشند

۱۰۸- گزینه «2»

$$\sin 2x \sin 4x = 1-\sin^2 x \longrightarrow -\frac{1}{2}(\cos 6x-\cos 2x)=\cos^2 x$$

$$-\cos 6x+\cos 2x = 2\cos^2 x \longrightarrow -\cos 6x+\cancel{\cos 2x} = 1+\cancel{\cos 2x}$$

$$\longrightarrow \cos 6x=-1 \longrightarrow 6x=2k\pi+\pi \longrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{6}(2k+1)}$$

۱۰۹- گزینه «4»

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\cot\frac{11\pi}{3}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\cot\left(\cancel{4\pi}-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}=\boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

۱۱۰- گزینه «1»

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{1+\sin 2x}}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم} \longrightarrow \lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}=\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\underbrace{|\sin x+\cos x|}_{+}}$$

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2 x}{\sin x+\cos x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to \frac{3\pi}{4}^-}\frac{-2\tan x(1+\tan^2 x)}{\cos x-\sin x}=\frac{-2(-1)(2)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{-\sqrt{2}}$$

$$=\boxed{-2\sqrt{2}}$$

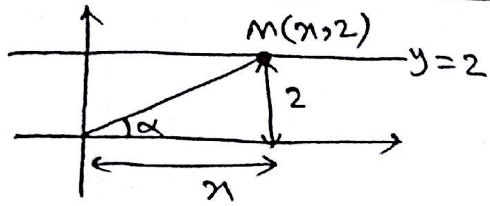
۱۱۱ - گزینه «۳»

$f(x)=\sqrt{x^2-[x]+|x|}$

با توجه به اینکه عبارت خواسته شده $f'_+(1)$ است و تابع در $x=1$ پیوستگی از راست دارد کافی است برای راحت‌گذاری و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم

$$f(x)=\sqrt{x^2-[1^+]+(x)}=\sqrt{x^2+x-1}\to f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-1}}\to f'_+(1)=\frac{3}{2}$$

۱۱۲ - گزینه «۲»



① $\begin{cases}\alpha'_x=?\\ x_0=4\end{cases}$

② $\tan\alpha=\frac{2}{x}\to\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$ ③ $\alpha'_x=\dfrac{-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}\xrightarrow{x=4}\alpha'_x=-0{,}1$

۱۱۳ - گزینه «۳»

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{n^2+2n}=2$$

$$n\geq n_0\to\left|\frac{2n^2+1}{n^2+2n}-2\right|<\frac{4}{100}\to\left|\frac{\overbrace{1-4n}^{\text{منفی}}}{n^2+2n}\right|<\frac{4}{100}\to$$

$$\frac{4n-1}{n^2+2n}<0{,}04\xrightarrow{\text{با کنترل گزینه‌ها}}\boxed{n_0=98}$$

۱۱۴ - گزینه «۳»

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=(\text{حدی }1)^\infty\ \text{مبهم}\to\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}}=e^0=1$$

روش دوم: در این روش از هم ارزی $\lim_{x\to a\ \text{یا}\ \infty}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a\ \text{یا}\ \infty}e^{g(x)(f(x)-1)}$ (اگر 1^∞ شود) استفاده می‌شود

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left(1+\frac{1}{n^2}-1\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}}=e^0=1$$

پاسخ تشریحی دیفرانسیل کنکور سراسری ۱۳۹۷ «حمید علیزاده»

115- گزینه «1»

چون تابع در بازه‌ی $(2, 3]$ پیوسته است پس باید در $x=2$ از راست پیوسته باشد

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-[x]}{x^3-x-6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x^3-x-6} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{3x^2-1} = \boxed{\frac{1}{11} = a}$$

116- گزینه «1»

چون تابع داده شده دارای نقطه مرزی در براکت نمی‌باشد پس در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است و هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد.

117- گزینه «4»

تنها نقطه‌ای که خط مماس از تابع در آن نقطه عبور می‌کند نقطه عطف است که نقطه عطف درجه سوم $x=\frac{-b}{3a}$ می‌باشد.

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x \to x = \frac{-b}{3a} = \frac{2}{3}$$

$$y' = 3x^2 - 4x + 3 \to y'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{8}{3} + 3 = \boxed{\frac{5}{3} = m}$$

118- گزینه «1»

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{2-\sin x} \xrightarrow[x=0]{\text{روی محور } y \text{ ها}} y = \frac{1}{2} \to A\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin 2x(2-\sin x) - (-\cos x)(\cos 2x)}{(2-\sin x)^2} \xrightarrow{x=0} f'(0) = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \to m_{\text{قائم}} = -4 \\ A\left(0, \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \to y - \frac{1}{2} = -4(x-0) \to y = -4x + \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -4x + \frac{1}{2} \\ y = x \text{ نیمساز ناحیه اول} \end{array}\right\} \to$$

$$-4x + \frac{1}{2} = x \to 5x = \frac{1}{2} \to \boxed{x = 0/1}$$

۱۱۹- گزینه «۳»

$$F(x,y)=y+xy^2+x-7=0$$

$$y'_x=-\frac{F'_{(x)}}{F'_{(y)}}=-\frac{y^2+1}{1+2xy}\xrightarrow[y=2]{x=1}y'_x=-1$$

$$y''_x=-\frac{2yy'_x(1+2xy)-\left(0+2\left((y)+y'_x x\right)\right)(y^2+1)}{(1+2xy)^2}\xrightarrow[y'_x=-1]{x=1,\ y=2}$$

$$y''_x=-\frac{-4(5)-(2)(5)}{25}=\frac{+30}{25}=\boxed{\frac{6}{5}}$$

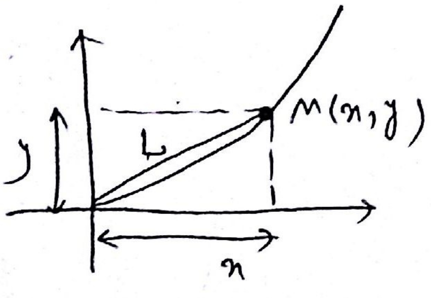
۱۲۰- گزینه «۲»

$$g(x)=f(4-x^2)\longrightarrow g'(x)=-2x\,f'(4-x^2)$$

$$g''(x)=-2f'(4-x^2)+4x^2f''(4-x^2)\xrightarrow{x=\sqrt{3}}$$

$$g''(\sqrt{3})=-2f'(1)+12f''(1)=-2(-5)+12(-1)=\boxed{-2}$$

۱۲۱- گزینه «۲»



① $\begin{cases}L'_t=1{,}3\\ x'_t=?\\ x_0=8\end{cases}$

② $L=\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow{y=x\sqrt{x}}L=\sqrt{x^2+x^3}$

③ $L'_t=\left(\frac{2x+3x^2}{2\sqrt{x^2+x^3}}\right)x'_t=\frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}x'_t\longrightarrow 1{,}3=\frac{26}{2\times 3}x'_t$

$$\longrightarrow\boxed{x'_t=0{,}3}$$

122- گزینه «4»

تابع در اطراف تنها مجانب قائم‌اش انفصال مضاعف دارد پس مخرج باید ریشه مضاعف بدهد پس :

$$\Delta=0 \to b^2-4=0 \to \begin{cases} b=2 \to f(x)=\dfrac{x^3+ax^2}{(x+1)^2=0} \to x=-1 \text{ مجانب قائم غ ق ق} \\ \boxed{b=-2} \to f(x)=\dfrac{x^3+ax^2}{(x-1)^2=0} \to x=1 \text{ مجانب قائم} \end{cases}$$

با توجه به شکل تابع به ازای $y=0$ فقط باید $x=0$ بدهد پس :

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2}{(x-1)^2} \xrightarrow{y=0} x^2(x+a)=0 \to \begin{cases} x=0 \\ x=-a \to \boxed{a=0} \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \to f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0 \to \begin{cases} x=0 \text{ غ ق ق} \\ x=3 \text{ مینیمم} \to \boxed{y_{min}=f(3)=6/75} \end{cases}$$

123- گزینه «3»

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}=\frac{\int_1^4 \frac{2x-1}{\sqrt{x}}\,dx}{4-1}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(2x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{2x^{3/2}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{32}{3}-4\right)-\left(\frac{4}{3}-2\right)\right)=\boxed{\frac{22}{9}}$$

124_ گزینه ۱ "

$$F(x) = x\int_3^{x^2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$F'(x) = 1\times\int_3^{x^2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4-1}}(2x)\times x$$

$$F'(\sqrt{3}) = 0 + \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \times 2(3) = \frac{6}{2} = 3$$